

Hong Kong Mathematics Olympiad (2020/21)

Individual Paper 1

香港数学竞赛 (2020/21)

个人项目卷一

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.
No approximation is accepted.

The diagrams are not necessarily drawn to scale.

除特别指明外，所有答案须以数字的真确值表达，并化至最简。

不接受近似值。

所有附图不一定依比例绘成。

Part A

甲部

1. Given that $W = a^b - b^a$, where $a \neq b \neq 0$. If W is a non-negative integer, find the least value of W .

已知 $W = a^b - b^a$ ，其中 $a \neq b \neq 0$ 。若 W 为一非负整数，求 W 的最小值。

2. Find the last two digits of 2^{2021} .

求 2^{2021} 的最尾两位数字。

3. α and β are the roots of the equation $x^2 - 7x + 4 = 0$. Find the value of $\alpha^3 + \beta^3$.

α 及 β 为方程 $x^2 - 7x + 4 = 0$ 的根。求 $\alpha^3 + \beta^3$ 的值。

4. Find the value of $8\cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ - 8\sin^2 15^\circ \cos^2 30^\circ$.

求 $8\cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ - 8\sin^2 15^\circ \cos^2 30^\circ$ 的值。

5. In Figure 1, three unit circles are placed inside an equilateral triangle ABC such that any circle is tangential to two sides of the triangle and to the other two circles. Find the area of $\triangle ABC$.

在图一中，三个单位圆位于一等边三角形 ABC 内，使得每个圆均与另外两圆及三角形的两边相切。求 $\triangle ABC$ 的面积。

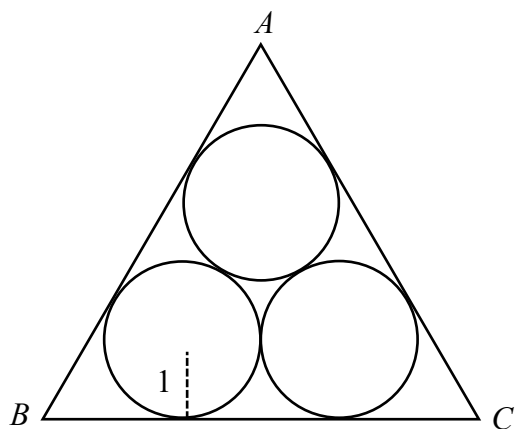


Figure 1

图一

6. In Figure 2, the altitude of an equilateral triangle ABC is 15 cm. P is a point inside $\triangle ABC$. The perpendicular distances from P to AB , BC and AC are h cm, 4 cm and 5 cm respectively. Find the value of h .

在图二中，等边三角形 ABC 的高为 15 cm。 P 为 $\triangle ABC$ 内的一点。从 P 与 AB 、 BC 和 AC 的垂直距离分别为 h cm、4 cm 和 5 cm。求 h 的值。

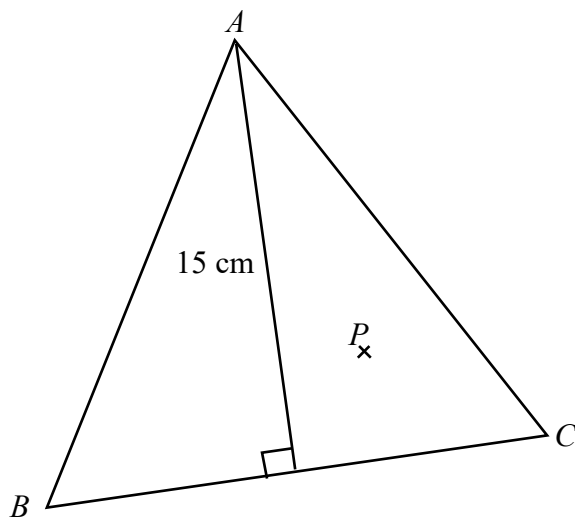


Figure 2

图二

7. p, q and r are prime numbers. If $pqr = 7(p + q + r)$, find the value of $p + q + r$.

p, q 及 r 为质数。若 $pqr = 7(p + q + r)$ ，求 $p + q + r$ 的值。

8. Find the value of $\frac{1001 \times 1002}{\frac{1}{1 + \frac{1}{1002}} + \frac{2}{2 + \frac{2}{1002}} + \frac{3}{3 + \frac{3}{1002}} + \dots + \frac{1001}{1001 + \frac{1001}{1002}}}$.

求 $\frac{1001 \times 1002}{\frac{1}{1 + \frac{1}{1002}} + \frac{2}{2 + \frac{2}{1002}} + \frac{3}{3 + \frac{3}{1002}} + \dots + \frac{1001}{1001 + \frac{1001}{1002}}}$ 的值。

9. How many even numbers between 4000 and 7000 have four different digits?

在 4000 和 7000 之间 4 个数位各不相同的偶数有多少个？

10. In Figure 3, BEF , ADE and CFD are straight lines such that $BE:EF=1:2$, $AD:DE=1:3$ and $CF:FD=1:4$. If the area of $\triangle DEF$ is 24 square unit, find the area of $\triangle ABC$.

在图三中， BEF 、 ADE 及 CFD 是直线，使得 $BE:EF=1:2$ ， $AD:DE=1:3$ 及 $CF:FD=1:4$ 。若 $\triangle DEF$ 的面积是 24 平方单位，求 $\triangle ABC$ 的面积。

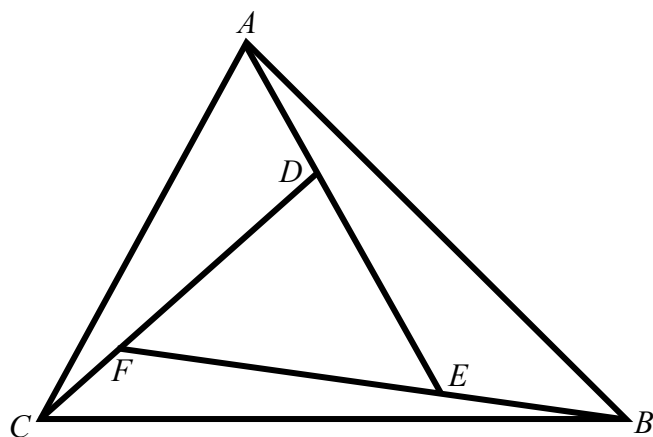


Figure 3

图三

Part B

乙部

11. If $\log_9 x^{18} = (\log_3 x)^3$, find the least value of x .

若 $\log_9 x^{18} = (\log_3 x)^3$ ，求 x 的最小值。

12. Let $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + x^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (x+5)^2}$, where x is a real number. Find the minimum value of $f(x)$.

设 $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + x^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (x+5)^2}$ ，其中 x 为一实数。求 $f(x)$ 的最小值。

13. In Figure 4, O is the centre of the circle. The diameter BA is produced to a point G such that GH is a tangent to the circle at C . If $OA = 5$ and $GC = 12$, find the length of BC .

在图四中， O 是圆的圆心。直径 BA 延长至点 G 使得 GH 是圆在 C 上的切线。若 $OA = 5$ 及 $GC = 12$ ，求 BC 的长度。

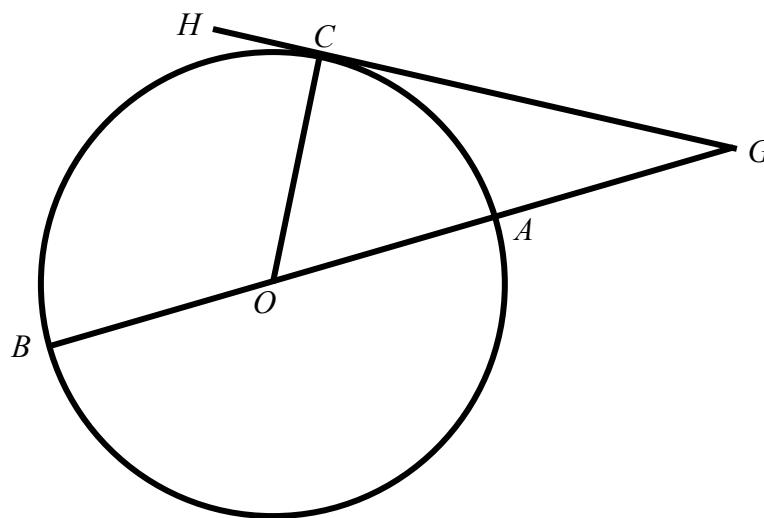


Figure 4

图四

14. For each real number x , the function $f(x)$ has the following property

$$f(x) + f(x-1) = x^2.$$

If $f(19) = 94$, find the value of $f(94)$.

对任意实数 x ，函数 $f(x)$ 有以下性质

$$f(x) + f(x-1) = x^2。$$

若 $f(19) = 94$ ，求 $f(94)$ 的值。

15. Given that $(x+2y)^2 = 2xy - 3x + 6y - 9$. If x and y are real number, find the value of $x+y$.

已知 $(x+2y)^2 = 2xy - 3x + 6y - 9$ 。若 x 及 y 为实数，求 $x+y$ 的值。

END

完